

Métodos topológicos en el análisis no lineal

Clase 4 - 9/9 (versión preliminar)

1 Una nueva dimensión en shooting

En las primeras clases nos hemos dedicado a resolver, Bolzano en mano (¡perdón por la involuntaria rima!) un pequeño ramillete de problemas de contorno mediante la técnica de shooting. Pero hasta ahora siempre se trató de ecuaciones escalares, ya que lidiar con sistemas requiere el empleo de herramientas topológicas más sofisticadas.

Uno podría preguntar para qué meternos a resolver sistemas, si estábamos tan bien con la ecuación escalar. Sin embargo, la dimensión 2 se nos filtra también en la ecuación escalar de segundo orden: más específicamente, en el problema periódico, que disimuladamente habíamos dejado de lado hasta ahora. En efecto, el operador de Poincaré asociado a una ecuación

$$u''(t) = f(t, u(t), u'(t))$$

consiste en fijar una condición inicial

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = v_0$$

y definir (cuando se pueda): $P(u_0, v_0) = (u(T), u'(T))$. En resumen, P no depende de un parámetro sino de dos. Es hora entonces de tomar el toro por las astas y encarar un aterrizaje forzoso (pero siempre con dignidad) en la topología.¹

Comencemos por un problema que, de acuerdo con nuestra ya bastante sólida experiencia, debería ser fácil: el problema de Dirichlet

$$u''(t) = f(t, u(t)), \quad u(0) = u(T) = 0$$

con f continua, localmente Lipschitz en u y **acotada**. La novedad es que ahora se trata de un sistema de dos ecuaciones: f es una función definida en $[0, T] \times \mathbb{R}^2$

¹Lo del toro es más literal de lo que parece aunque, claro está, no desde el punto de vista zoológico sino matemático. En efecto, las funciones periódicas se pueden pensar como funciones definidas en la circunferencia S^1 ; las doblemente periódicas, frecuentes por ejemplo en la ecuación de ondas, se identifican con funciones definidas en el toro bidimensional, ese que conocemos todos: $T^2 = S^1 \times S^1$.

y la solución que buscamos es un vector $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$. Inspirados por el caso escalar, podemos resolver el problema de valores iniciales

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = \lambda$$

y definir $S(\lambda) = u(T)$. Pero los valores iniciales 0 y λ son vectores de \mathbb{R}^2 , así que el argumento de “si λ es grande, entonces u es creciente” se va ligeramente al tacho. O tal vez no del todo: para empezar, escribamos $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ y entonces, como antes:

$$|u'(t) - \lambda| = \left| \int_0^t f(s, u(s)) ds \right| \leq T \|f\|_\infty.$$

Mirando cada coordenada, $j = 1, 2$, se deduce que u_j es creciente cuando $\lambda_j = R > T \|f\|_\infty$ y decreciente cuando $\lambda_j = -R < -T \|f\|_\infty$. Luego, las coordenadas del operador de shooting $S = (S_1, S_2)$ satisfacen:

$$S_1(-R, \lambda_2) < 0 < S_1(R, \lambda_2), \quad S_2(\lambda_1, -R) < 0 < S_2(\lambda_1, R).$$

Aquí uno podría, como abrazao a un rencor, aferrarse a Bolzano y observar que tanto S_1 como S_2 tienen que anularse en algún punto del cuadrado $[-R, R] \times [-R, R]$. La pregunta crucial es: ¿habrá algún punto en el que ambas coordenadas se anulen a la vez?

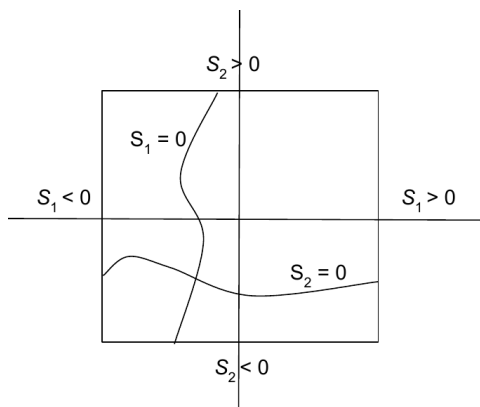


Figure 1: Bolzano 2D

Dejaremos la respuesta en suspenso por un momento para ver si podemos entrarle al asunto por otro lado. Si integramos una vez más la ecuación, obtenemos

$$S(\lambda) = u(T) = T\lambda + \int_0^T \int_0^t f(s, u(s)) ds$$

y todo lo que nos interesa es que

$$|S(\lambda) - T\lambda| \leq \frac{T^2}{2} \|f\|_\infty$$

o, si se prefiere:

$$\left| \frac{S(\lambda)}{T} - \lambda \right| \leq \frac{T}{2} \|f\|_\infty := M.$$

Lo que queremos es un cero de S o, equivalentemente, un punto fijo de la función $g(\lambda) = \lambda - \frac{S(\lambda)}{T}$. Pero entonces vamos por buen camino, ya que la imagen de g se mete en la bola cerrada de radio M y, en particular, $g(\overline{B_M(0)}) \subset \overline{B_M(0)}$. ¿Será entonces que aquel enunciado que llamamos “teorema de Brouwer” vale también en dimensión $n > 1$? Cabría sospechar que sí, porque el caso $n = 1$ pinta demasiado sencillito como para llevar nombre propio.

Pero, otra vez, vamos a poner el asunto en el freezer a ver si podemos decir algo más. Por ejemplo, si pensamos S como un campo de vectores, para $|\lambda| = R > M$ resulta

$$\langle S(\lambda), \lambda \rangle = T|\lambda|^2 - MT|\lambda| = TR(R - M) > 0.$$

En otras palabras (mejor dicho: en palabras), sobre el borde de la bola de radio M , el campo S apunta siempre hacia afuera. ¿Significará eso que S tiene que anularse en algún punto?

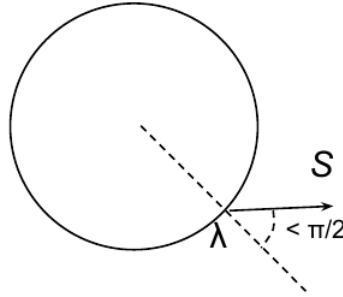


Figure 2: Brouwer, versión campestre

Finalmente, vamos a agregar un nuevo punto de vista, cuyo sentido topológico es bastante profundo. Para hacerlo más simple, vamos a recurrir (si vale el contrasentido) a los números complejos. A fin de preparar psicológica y emocionalmente al lector, λ se va a llamar ahora z ; si definimos M y g como antes, resulta

$$|g(z) - z| \leq M$$

y, en particular, para $|z| = R > M$ se tiene:

$$|g(z) - z| < |z|.$$

Aquí el lector versado en análisis complejo seguramente exclamará: *Rouché!* Y no se trata de un desvarío: en efecto, si g y h son funciones analíticas en $\overline{\Omega}$ y se

cumple que

$$|g(z) - h(z)| < |h(z)| \quad z \in \partial\Omega$$

entonces g y h tienen el mismo número de ceros (contados con su multiplicidad) en Ω . En este caso, poniendo $h(z) = z$ todo parecería indicar que g se tiene que anular (exactamente) una vez en $\Omega := B_R(0)$. Pero hay un pequeño detalle: la función g es continua, pero hay muy poca chance de que sea analítica (prácticamente nula, se podría decir. El lector, ese que era versado, sabrá explicar por qué). No hay duda, aquí tenemos un buen punto, de modo que no nos queda otra que reconocer: *Touché!* Pero tocado no es lo mismo que hundido: cual ave Fénix, el teorema de Rouché renace de las cenizas en una versión para funciones continuas: el teorema de ‘la vuelta al perro’.

Este nombre tan simpático tiene una justificación muy sencilla: supongamos que γ es una parametrización del borde de Ω , entonces podemos considerar las curvas cerradas $h \circ \gamma$ y $g \circ \gamma$. Ahora pensemos que $h \circ \gamma$ describe la trayectoria de un paseador que saca a dar una vuelta a un perrito, cuya trayectoria está dada por $g \circ \gamma$. La hipótesis del teorema dice que la distancia entre el pichicho y el paseador puede variar (por ejemplo, si usa una correa retráctil), pero siempre es menor que la distancia del paseador al origen. Dependiendo de la raza, el perro puede dar más o menos vueltas alrededor del paseador, pero una cosa es clara: la cantidad de vueltas que ambos describen respecto del origen es la misma. La

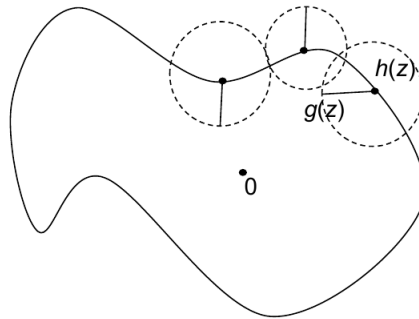


Figure 3: Un paseo topológico

relación entre los ceros de g y el número de vueltas de $g \circ \gamma$ quedará más clara cuando nos adentremos en los misterios del grado topológico, aunque en realidad no necesitamos tanto: alcanza con recordar el concepto de *índice de una curva*. Pero esto llegará más adelante: por el momento, vamos a ver que todas las situaciones anteriores se pueden resolver a partir de un único resultado.

2 Todos los caminos conducen a r

En la sección previa vimos que el método de shooting nos puede llevar a cuatro situaciones distintas que, en realidad, se reducen a tres: el lector atento habrá notado que, bien mirado, el escenario de Bolzano 2D es el mismo que el de la versión “campestre”. En efecto, vemos que, al fin y al cabo, en el dibujo de la Figura 1 el campo S , restringido al borde, apunta siempre hacia afuera. Claro que no se trata de un círculo sino sobre un cuadrado, pero ¿quién se fija? Incluso se podría argumentar que *es* un círculo, si uno considera la norma infinito, aunque nada de eso importa: el resultado vale para cualquier figura *topológicamente equivalente* a un círculo. La situación de Brouwer es un poco diferente, porque buscamos un punto fijo y no un cero. Pero caemos en lo mismo: si $\varphi : \overline{B_R(0)} \rightarrow \overline{B_R(0)}$ no tiene puntos fijos en el borde, entonces el campo $x - \varphi(x)$ apunta hacia afuera. Y ni hablar de la versión Rouché: si

$$|x - g(x)| < |x|$$

para $|x| = R$, entonces

$$|x|^2 - 2\langle x, g(x) \rangle + |g(x)|^2 < |x|^2.$$

Luego

$$\langle x, g(x) \rangle > |g(x)|^2 \geq 0,$$

así que el campo g apunta hacia afuera sobre el borde de la bola (la circunferencia, como le dicen por ahí).

Ahora bien, en general, si $g : \overline{B_R(0)} \rightarrow \mathbb{R}^2$ es un campo que apunta hacia afuera en el borde y suponemos que no se anula, entonces podemos construir una función r de la siguiente manera: para cada $x \in \overline{B_R(0)}$ consideramos la semirrecta

$$L^+ : x + tg(x) \quad t > 0$$

y definimos $r(x)$ como el punto donde L^+ se corta con el borde. Queda como ejercicio probar que r es continua; la Figura 4 ayuda a convencerse de que esto no ocurre si el campo anda apuntando a veces para adentro y otras para afuera.

Esto explica el título de esta sección: a partir de cualquiera de los enfoques elegidos, suponer que S no se anula nos lleva a la existencia de una función $r : \overline{B_R(0)} \rightarrow \partial B_R(0)$ continua que deja fijos los puntos del borde. Nuestro objetivo es probar que una función así, denominada *retracción*, no puede existir.

Lo que sí existe es una gran variedad de demostraciones de este hecho. En dimensión 1 es más bien facilongo, porque el borde del intervalo $(-R, R)$ es el conjunto $\{-R, R\}$ que no es conexo. La cosa no es tan sencilla cuando la dimensión es mayor aunque, por una grata casualidad, estamos en el plano, donde todavía se pueden encontrar demostraciones bastante elementales. Para fijar ideas: el resultado sale en unos pocos renglones si uno usa análisis complejo (sin ir muy lejos, con la misma idea de Rouché). Pero también se puede ver, por ejemplo, empleando el teorema de Green. En este último caso, uno debería primero suponer que r es suave, pero eso no es problema: una vez probado el

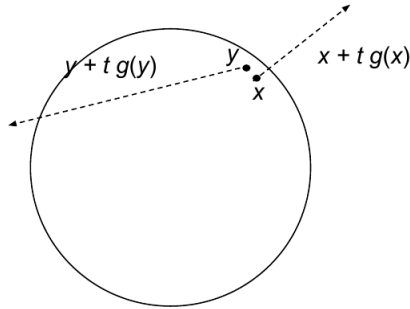


Figure 4: La retracción se hace discontinua

teorema para r suave siempre hay un Stone-Weierstrass en el que apoyarse. Para los aficionados al juego, en el apéndice bosquejaremos una demostración basada en el Hex. En realidad se trata de una demostración del teorema de Brouwer, aunque (ejercicio) se prueba fácilmente que ambos resultados son equivalentes. Pero veremos ahora una demostración muy sencilla, que emplea únicamente... la raíz cuadrada. Claro que se trata de la raíz cuadrada compleja aunque, cabe aclarar, no utilizaremos *análisis* complejo sino simplemente de la más ingenua idea que uno puede tener de los elementos de \mathbb{C} como objetos de la pinta $z = a + bi$. Para definir una raíz cuadrada no hace falta siquiera conocer la forma polar: por ejemplo, si z no es un número real menor o igual que 0 se puede definir una raíz $w = c + di$ en la forma

$$c = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}, \quad d = \frac{b}{2c}.$$

Si pensamos a y b como variables, se deduce que si V es una bola que no contiene al origen, entonces existe una raíz cuadrada continua definida en V . La anterior elección de c y d no sirve si V se corta con la semirrecta $\mathbb{R}_{\leq 0}$, pero en ese caso podemos definir

$$d = \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}, \quad c = \frac{b}{2d}.$$

Una consecuencia inmediata es que si h es una función continua cuya imagen cae en tal V , es posible definir una raíz cuadrada continua de h , es decir, una función continua s tal que $s(z)^2 = h(z)$. Es claro que, en tal caso, $-s$ también es una raíz cuadrada de h ; luego, se tiene:

Lema 2.1 Sean V una bola que no contiene al 0 y $h : C \subset \mathbb{C} \rightarrow V$ continua. Dados $z_0 \in C$ y w_0 tal que $w_0^2 = h(z_0)$, entonces existe $s : C \rightarrow \mathbb{C}$ continua tal que $s(z)^2 = h(z)$ y $s(z_0) = w_0$.

Demostración: Sea $\rho : V \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\rho(w)^2 = w$ para todo w , entonces $\pm\rho \circ h$ son raíces cuadradas de h . Como $w_0^2 = h(z_0) = [\pm\rho(h(z_0))]^2$, vale $w_0 = \pm\rho(h(z_0))$. □

A modo de observación trivial, notemos que el hecho de que cada $z \neq 0$ tiene solo dos raíces cuadradas se debe a que \mathbb{C} es un dominio íntegro: en efecto, si $w_1^2 = w_2^2$, entonces $(w_1 - w_2)(w_1 + w_2) = 0$ y luego $w_1 = \pm w_2$. Esto permite mostrar que, en un dominio conexo, la raíz cuadrada continua de una función no nula es única salvo por el signo:

Lema 2.2 *Sean C conexo y sean s_1, s_2 raíces cuadradas continuas de cierta función $h : C \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Entonces $s_1 \equiv s_2$ o $s_1 \equiv -s_2$.*

Demostración: Basta observar que $\left(\frac{s_1(z)}{s_2(z)}\right)^2 = \frac{h(z)}{h(z)} = 1$ para todo z ; en consecuencia, los conjuntos $\{z : s_1(z) = s_2(z)\}$ y $\{z : s_1(z) = -s_2(z)\}$ son cerrados disjuntos cuya unión es C . □

Estamos en condiciones de probar el teorema de no-retracción. Por simplicidad lo hacemos directamente para la bola unitaria B :

Teorema 2.3 *No existe una función continua $r : \overline{B} \rightarrow S^1 := \partial B$ tal que $r(z) = z$ para todo $z \in S$.*

Demostración: Supongamos que r es una retracción (uniformemente) continua y fijemos $\delta > 0$ tal que $|r(z) - r(w)| < 1$ para $|z - w| \leq \delta$. Por el Lema 2.1, dados $z, z_0 \in \overline{B}$ con $|z - z_0| \leq \delta$ y w_0 una raíz cuadrada de $r(z_0)$, existe una raíz cuadrada continua de r definida sobre $\overline{V}_\delta(z) := \overline{B}_\delta(z) \cap \overline{B}$ que en z_0 toma el valor w_0 . Además, el Lema 2.2 garantiza que esta raíz cuadrada es única.

En particular, podemos considerar $s : \overline{V}_\delta(1) \rightarrow \mathbb{C}$ la raíz cuadrada continua de r tal que $s(1) = 1$. Veamos que s se puede extender (en forma única) a una raíz cuadrada continua de r definida en toda la bola \overline{B} .

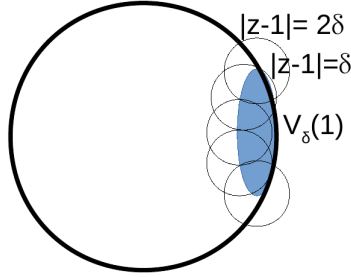
En efecto, dado $z \in \overline{B}$ tal que $|z - 1| = \delta$, existe una única raíz cuadrada continua s_z de f definida en $\overline{V}_\delta(z)$ tal que $s_z(z) = s(z)$. Como la intersección de bolas es un conjunto conexo, el Lema 2.2 dice que s_z coincide con r en $\overline{V}_\delta(1) \cap \overline{V}_\delta(z)$ y también que $s_z = s_w$ en $\overline{V}_\delta(z) \cap \overline{V}_\delta(w)$ para cualquier otro w tal que $|w - 1| = \delta$. Esto muestra que s se extiende (en forma única) a una raíz cuadrada de r en $\overline{V}_{2\delta}(1)$ y, repitiendo el procedimiento, a toda la bola \overline{B} .

Como r es una retracción, sobre S^1 la función s es una raíz cuadrada de la identidad. Luego, para $z, w \in S^1$ vale $s(zw)^2 = zw = s(z)^2 s(w)^2$, es decir,

$$s(zw) = \pm s(z)s(w).$$

Esto muestra que la función $\frac{s(zw)}{s(z)s(w)}$ vale siempre ± 1 ; además es continua en $S^1 \times S^1$ y $s(1) = 1$, de donde se deduce que $s(zw) = s(z)s(w)$ para todo $z, w \in S^1$. Pero esto es absurdo, porque en tal caso

$$1 = s(1) = s((-1)^2) = s(-1)^2 = -1.$$



□

La demostración anterior esconde una pequeña sutileza, más precisamente cuando decimos que “la intersección de bolas es un conjunto conexo”, para garantizar que las extensiones locales centradas en dos puntos z_1 se pegan bien. El detalle es que no se trata de la intersección de **dos** bolas centradas en z_1 y z_2 sino de **cuatro**, porque estamos tomando además la intersección con el conjunto $V_\delta(1)$. Esto explica por qué la demostración no funciona si reemplazamos B por un conjunto que no sea simplemente conexo: supongamos, por ejemplo, que queremos repetir la idea, pero ahora a \overline{B} le sacamos una bolita abierta centrada en 0: cuando δ está cerca de 1 y $|z_1 - 1| = |z_2 - 1| = \delta$, la intersección de bolas centradas en z_1 y z_2 con nuestro conjunto agujereado no es necesariamente conexo. Notemos, además, que empleamos el hecho de que una función continua sobre un compacto es uniformemente continua, lo que nos permitió avanzar a un paso constante δ , lento pero firme. Sin usar esto, queda un δ que depende de cada z , pero igual se puede probar por ejemplo que el conjunto $\{\delta : r \text{ tiene raíz cuadrada en } \overline{V_\delta(1)}\}$ es abierto y cerrado en $[0, 2]$. En cualquier caso, vale advertir que no se zafa de usar la compacidad.

Observación 2.4 *La última parte de la demostración anterior muestra que no hay una determinación continua del argumento, es decir, una función $A : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $z = |z|e^{iA(z)}$ para todo z . En efecto, si existiera tal A podríamos definir $s : S \rightarrow S$ dada por $s(z) := e^{i\frac{A(z)}{2}}$, que es continua y verifica $s(z)^2 = z$.*

Podemos decir, entonces, que eliminamos todos nuestros problemas de raíz (nunca más literal): a partir de lo anterior se deducen los siguientes resultados (los detalles quedan como ejercicio).

Teorema 2.5 (Brouwer) *Toda función $f : \overline{B} \rightarrow \overline{B}$ continua tiene al menos un punto fijo.*

Teorema 2.6 *Toda función $f : \overline{B} \rightarrow \overline{B}$ continua tal que $\langle f(x), x \rangle \geq 0$ para $|x| = 1$ tiene al menos un cero.*

Es claro, en este último teorema, que la desigualdad anterior se puede invertir (es decir, que el campo apunte para adentro): por ejemplo, basta con reemplazar f por $-f$. Tal vez provoque alguna inquietud que hayamos puesto una desigualdad no estricta en la hipótesis, pero la cosa funciona igual. Ante la duda, un truco eficaz es el siguiente: definir $f_n(x) = f(x) + \frac{x}{n}$, que cumple la hipótesis, ahora sí, con desigualdad estricta. Si x_n es un cero de f_n , entonces existe $\{x_{n_j}\}$ que converge a un cero de f . Lo mismo ocurre con el siguiente resultado:

Teorema 2.7 (Poincaré-Miranda) *Si $f : [-1, 1] \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ continua verifica*

$$f(-1, y) \leq 0 \leq f(1, y), \quad f_2(x, -1) \leq 0 \leq f_2(x, 1)$$

para $x, y \in [-1, 1]$, entonces f tiene al menos un cero.

Es fácil ver que todos estos teoremas son equivalentes entre sí, es decir, que usando cualquiera de ellos se puede probar cualquier otro. ¿Valdrá también una versión ‘expansiva’ de Brouwer, como vimos en el caso unidimensional? En otras palabras: ¿es cierto que toda función $f : \bar{B} \rightarrow \mathbb{R}^2$ continua tal que $\bar{B} \subset f(\bar{B})$ tiene al menos un punto fijo? Sería muy fácil ver que eso ocurre por ejemplo si f es inyectiva (¿por qué?), pero en general la respuesta, como el lector intuye, es negativa. No es difícil encontrar un contraejemplo, que además servirá para convencerse de que la topología del plano tiene más vericuetos que la de la recta. Pero para mitigar la decepción, uno puede intentar probar la siguiente versión, sin que importe ya dónde mandamos la bola (futboleros, abstenerse):

Teorema 2.8 (Rothe) *Sea $f : \bar{B} \rightarrow \mathbb{R}^2$ continua tal que para todo $\eta > 1$ y todo $x \in \partial B$ vale $f(x) \neq \eta x$. Entonces f tiene al menos un punto fijo.*

La demostración es sencilla empleando el teorema de Brouwer. Curiosamente, la “recíproca” es trivial: si $f(\bar{B}) \subset \bar{B}$, entonces es claro que vale la hipótesis de Rothe. El lector imaginativo también puede darle una interpretación canina, pensando en los ceros de $x - f(x)$.

3 Siempre se vuelve al primer Dirichlet

Ya provistos de un pequeño pero respetable arsenal de herramientas topológicas, volvamos a nuestro primer amor: el problema de Dirichlet

$$u''(t) = f(t, u(t)), \quad u(0) = u(T) = 0.$$

Para f acotada, nos convencimos ya de varias maneras distintas de que existe al menos una solución; es hora de encarar problemas algo más desafiantes. Por empezar, recordemos una situación que nos había resultado fácil para el problema escalar: el caso en que f es creciente respecto de u . Claro que eso no tiene tanto sentido para una f vectorial, aunque es sencillo rescatar la idea observando que “creciente” es lo mismo que

$$[f(t, u) - f(t, v)](u - v) \geq 0.$$

Esto se generaliza de inmediato a dimensión mayor, simplemente reemplazando el producto por producto escalar:

$$\langle f(t, u) - f(t, v), u - v \rangle \geq 0.$$

El procedimiento para encontrar soluciones vía shooting funciona exactamente igual que en el caso escalar y los detalles quedan como ejercicio: primero se encuentran cotas que solo dependen de la monotonía y -por ejemplo- la función $f(t, 0)$:

$$\langle u''(t), u(t) \rangle = \langle f(t, u(t)) - f(t, 0), u(t) \rangle + \langle f(t, 0), u(t) \rangle \geq \langle f(t, 0), u(t) \rangle,$$

su ruta. Eso permite truncar y aquí sí hay una novedad: ahora se trata de vectores, así que la función T_R ahora debería ser

$$T_R(u) = \begin{cases} u & \text{si } |u| \leq R \\ R \frac{u}{|u|} & \text{si } |u| > R. \end{cases}$$

Cabe aclarar que la función $\hat{f}(t, u) := f(t, T_R(u))$ no tiene por qué ser monótona, pero la cota se obtiene de la misma forma que antes, ya que sigue valiendo que

$$\langle \hat{f}(t, u) - \hat{f}(t, 0), u \rangle \geq 0.$$

Esto garantiza que las soluciones del problema truncado (que, como sabemos, existen) coinciden con las del problema original.

El otro ejemplo que resolvimos de modo sencillo fue aquel en que empleamos la condición de Hartman, que ahora es igual pero vectorial: en vez de $f(t, R) > 0 > f(t, -R)$ pedimos

$$\langle f(t, u), u \rangle > 0 \quad |u| = R.$$

Para ver que una solución u del problema truncado es solución del problema original, conviene definir ahora

$$\phi(t) = \frac{|u(t)|^2}{2}.$$

Si ϕ alcanza su valor máximo en t_0 y valiera $\phi(t_0) > \frac{R^2}{2}$, entonces $t_0 \in (0, T)$ y se cumple:

$$0 = \phi'(t_0) = \langle u'(t_0), u(t_0) \rangle$$

$$0 \geq \phi''(t_0) = \langle u''(t_0), u(t_0) \rangle + \langle u'(t_0), u'(t_0) \rangle > \langle \hat{f}(t_0, u(t_0)), u(t_0) \rangle > 0.$$

Pero

$$\hat{f}(t_0, u(t_0)) = f\left(t_0, R \frac{u(t_0)}{|u(t_0)|}\right),$$

de modo que

$$\langle \hat{f}(t_0, u(t_0)), u(t_0) \rangle > 0,$$

lo que es absurdo.

Observación 3.1 *Un detalle interesante en la demostración anterior es el hecho de que en el presunto (luego desmentido) valor máximo t_0 se tiene que cumplir que $u'(t_0)$ es perpendicular a $u(t_0)$. Esto da un indicio de que si quisiéramos formular una condición similar para el caso más general*

$$u''(t) = f(t, u(t), u'(t)),$$

entonces bastaría con pedir

$$\langle f(t, u, v), u \rangle > 0 \quad |u| = R, v \perp u.$$

Sin embargo, hay un pequeño detalle: no hay garantías de que el problema truncado

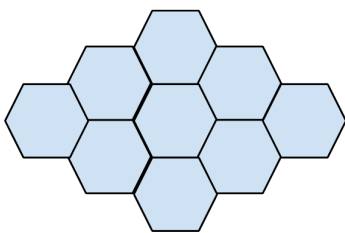
$$u''(t) = f(t, T_R(u(t)), u'(t)), \quad u(0) = u(T) = 0$$

tenga solución, a menos que pidamos por ejemplo que f restringida a $[0, T] \times [-R, R] \times \mathbb{R}$ sea acotada. Esto se puede mejorar con una hipótesis adicional que veremos más adelante, llamada condición de Nagumo, que permite obtener cotas para la derivada y posibilita un truncamiento por partida doble:

$$\hat{f}(t, u, v) = f(t, T_R(u), T_Q(v)).$$

4 Apéndice: yo me juego entero, qué le voy a hacer

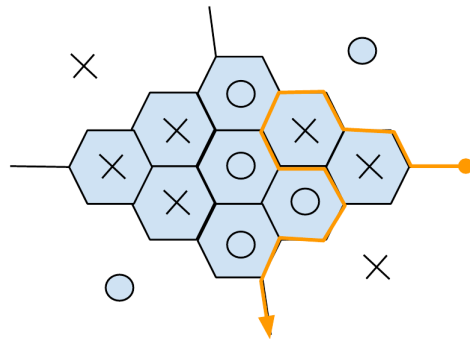
Veremos ahora la prometida demostración del teorema de Brouwer en el plano que aparece en [1], basada en el juego del Hex, llamado así porque su tablero no es una cuadrícula sino una suerte de ‘hexícula’ de $n \times n$, compuesta por hexágonos al modo de *la biblioteca de Babel*:



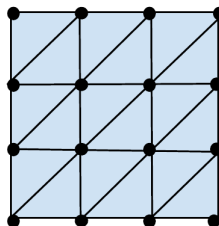
A cada jugador se le asigna uno de los dos pares de lados opuestos y, por turno, van marcando casillas empleando signos distintos: por ejemplo, una cruz para el primer jugador y un círculo para el segundo. El ganador es aquel que logre conectar primero el par de lados que le corresponde.

Como se ve, las reglas son muy simples, así como el llamado *teorema del Hex* que dice: en cualquier partida de Hex siempre hay un ganador. En rigor,

el resultado es más general, pues vale aunque el número de círculos cruces no sea parejo: por ejemplo, puede ocurrir que el primer jugador salga un momento al baño (o a buscar un paquete de Mercado Libre, cosa muy frecuente en estos tiempos) y el otro aproveche para garrapatear unos cuantos círculos: en cualquier tablero completo, de la manera que sea, o bien los lados “cruz” o bien los lados “círculo” se encuentran conectados. Y la explicación es inmediata: alcanza con trazar una poligonal, empezando por alguno de los vértices, de acuerdo con la siguiente regla: avanzar dejando siempre del mismo lado las cruces y los círculos. En la figura, elegimos el vértice de la derecha y dejamos la cruz a la izquierda; como se ve, en cada uno de los pasos siguientes hay siempre una única elección posible para seguir avanzando. Es fácil ver que estos recorridos solo se detienen al llegar a otro vértice y, cuando esto ocurre, alguno de los dos jugadores gana.



Veamos ahora una prueba del teorema de Brouwer. No lo haremos para una bola cerrada sino para un cuadrado, aunque ya sabemos que para un topólogo todo es igual, nada es mejor: lo mismo un círculo que un gran cuadrado. Por eso, nuestra alma tanguera nos autoriza a transformar el anterior tablero de hex en este otro (en este caso de 4×4), menos parecido a una biblioteca borgeana pero que funciona exactamente igual. Los que antes eran hexágonos ahora son puntos; la relación de contigüidad viene dada por las líneas que conectan dichos puntos entre sí.



Supongamos entonces que f es una función continua que envía el cuadrado $C = [0, 1] \times [0, 1]$ en sí mismo y no tiene puntos fijos, entonces (por compacidad) existe $c > 0$ tal que $|V - f(V)| \geq c$ para todo V . Transformemos el cuadrado en un tablero de Hex, trazando una cuadrícula suficientemente fina como para que si V y W son vértices contiguos, entonces

$$|V - W| \leq \frac{c}{2}, \quad |f(V) - f(W)| \leq \frac{c}{2}$$

Imaginemos ahora que el jugador que quiere unir los lados verticales marca todos aquellos vértices tales que la distancia entre su primera coordenada y la primera coordenada de su imagen es mayor que $c/2$, es decir, todos los V tales que

$$|V_1 - f_1(V)| > \frac{c}{2}.$$

A su vez, el otro jugador marca, entre los vértices que quedan libres, aquellos V tales que

$$|V_2 - f_2(V)| > \frac{c}{2}.$$

Veamos que el conjunto elegido por el primer jugador no conecta los lados verticales. En efecto, observemos que si V es un vértice del lado derecho del cuadrado, entonces $f_1(V) \leq V_1$, ya que $f(C) \subset C$. Luego, si está entre los vértices marcados por el primer jugador, vale $V_1 - f_1(V) \geq c/2$. Ahora supongamos que hay otro vértice contiguo W que también está marcado: si fuera $f_1(W) - W_1 \geq c/2$, entonces

$$c < V_1 - f_1(V) + f_1(W) - W_1 \leq |V_1 - W_1| + |f_1(V) - f_1(W)| \leq c,$$

lo que es absurdo. En consecuencia, vale la desigualdad inversa: $W_1 - f_1(W) \geq c/2$. De esta forma, si hubiera un caminito (perdón por esta nueva referencia tanguera) que llega hasta un cierto vértice Z del borde izquierdo, valdría $Z_1 > f_1(Z)$, lo que es absurdo.

Del mismo modo, conjunto correspondiente al segundo jugador no conecta los lados horizontales: en otras palabras, no hay vencedores ni vencidos. Esto quiere decir que se trata de una partida de Hex todavía inconclusa; luego, existe al menos un vértice V que no pertenece a ninguno de los dos conjuntos. Pero entonces

$$|f(V) - V| \leq |f_1(V) - V_1| + |f_2(V) - V_2| < c,$$

que constituye la última ‘herida absurda’ de esta clase.

References

[1]